МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ШАРИКА В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Цель работы – изучение закономерностей движения небольшого сферического тела в вязкой жидкости методом компьютерного моделирования и выбор оптимальных параметров эксперимента для определения вязкости жидкости методом Стокса.

Вязкость жидкости – свойство жидкости оказывать сопротивление относительному перемещению ее слоев, которое проявляется том, что возникает сила трения между слоями жидкости, движущимися с различными скоростями. Количественной характеристикой вязкости является коэффициент динамической вязкости, или коэффициент внутреннего трения. Классическим экспериментальным методом определения коэффициента динамической вязкости жидкости является метод Стокса, основанный на закономерностях падения шарика в вязкой среде. Экспериментальная установка, методика измерений, физическая модель описаны выше, в методических указаниях к лабораторной работе № 1.5. Вычисление коэффициента динамической вязкости в лабораторной работе осуществляется по результатам измерения времени равномерного движения шариков различного радиуса в вязкой среде по следующей формуле [1]:

$$\eta = \frac{2}{9} g r^2 \frac{\rho_{\text{ш}} - \rho_{\text{ж}}}{v} \cdot \frac{1}{1 + 2,4\dfrac{r}{R}} \cdot \frac{1}{1 + 3,3\dfrac{r}{h}}, \qquad (1)$$

где η – коэффициент динамической вязкости жидкости, g– ускорение свободного падения, g =9,81 м/с^2, r – радиус шарика, $\rho_{\text{ш}}$ – плотность материала, из которого сделан шарик (как правило, сталь), $\rho_{\text{ж}}$ – плотность жидкости, в которой движется шарик (например, касторовое масло), v – скорость равномерного движения шарика, R – радиус сосуда, h – высота столба жидкости.

Поскольку шарик движется равномерно, скорость его движения может быть определена по формуле

$$v = \frac{S}{t}, \tag{2}$$

где S – расстояние, пройденное шариком, t – время движения шарика. Окончательно расчетная формула имеет вид [1]:

$$\eta = \frac{2}{9} g r^2 \frac{(\rho_{ш} - \rho_{ж}) t}{S} \cdot \frac{1}{1 + 2,4\frac{r}{R}} \cdot \frac{1}{1 + 3,3\frac{r}{h}}. \tag{3}$$

Точность результата измерения зависит от точности, с которой измерены, входящие в расчетную формулу величины, и от правильного выбора параметров эксперимента – радиуса шарика и области равномерного движения. Выбор оптимальных параметров можно осуществить на основании моделирования процесса падения шарика в вязкой среде.

Физическая модель

Считая шарик материальной точкой, на основе рассмотрения действующих не него сил может быть записано уравнение движения:

$$ma = mg - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{ж} g - 6\pi\eta r v, \tag{4}$$

где a – ускорение, с которым движется шарик.

Шарик по-прежнему рассматривается как материальная точка, Сферическая форма учитывается только при записи выражения для силы сопротивления $F_{с}$.

Условием равномерного движения является равенство нулю ускорения, $a = 0$. При выполнении этого условия:

$$0 = mg - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{ж} g - 6\pi\eta r v \tag{5}$$

тело движется равномерно с постоянной скоростью.

Выражая массу шарика через его плотность $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{ш}$, получаем следующее выражение для скорости равномерного движения $v_{р}$:

$$v_{р} = \frac{2}{9} g r^2 \frac{\rho_{ш} - \rho_{ж}}{\eta}. \tag{6}$$

Математическая модель

Из уравнения движения (4) следует выражение для ускорения:

$$a = g\left(1 - \frac{\rho_ж}{\rho_ш}\right) - \frac{9}{2}\frac{\eta v}{\rho_ш r^2}. \qquad (7)$$

Обозначив

$$\alpha = g\left(1 - \frac{\rho_ж}{\rho_ш}\right), \qquad (8)$$

$$\beta = \frac{9}{2}\frac{\eta}{\rho_ш r^2}, \qquad (9)$$

получим

$$a = \alpha - \beta v. \qquad (10)$$

При этом заметим, что

$$v_р = \frac{\alpha}{\beta}. \qquad (11)$$

Учитывая, что $a = \dfrac{dv}{dt}$, запишем уравнение (10) в виде:

$$\frac{dv}{dt} = \alpha - \beta v.$$

Отсюда

$$\frac{dv}{\alpha - \beta v} = dt.$$

Интегрируя левую и правую часть, и учитывая начальные условия $t = 0$; $v = v_0$ получим:

$$-\frac{1}{\beta}\ln|\alpha - \beta v| + c = t;$$

$$c = \frac{1}{\beta} \ln | \alpha - \beta v_0 | .$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\beta} \ln \left| \frac{\alpha - \beta v_0}{\alpha - \beta v} \right| = t .$$

Учитывая (15), получим:

$$\frac{1}{\beta} \ln \left| \frac{v_\text{р} - v_0}{v_\text{р} - v} \right| = t .$$

Тогда зависимость скорости от времени движения шарика в вязкой жидкости может быть записана как:

$$v = v_\text{р} - \left(v_\text{р} - v_0 \right) e^{-\beta t} . \qquad (16)$$

Если v_0=0, то:

$$v = v_\text{р} \left(1 - e^{-\beta t} \right). \qquad (17)$$

Учитывая, что $v = \frac{dS}{dt}$, можем получить зависимость пройденного пути от времени:

$$\frac{dS}{dt} = v_\text{р} - \left(v_\text{р} - v_0 \right) e^{-\beta t} ,$$

$$dS = \left[v_\text{р} - \left(v_\text{р} - v_0 \right) e^{-\beta t} \right] dt ,$$

$$S = v_\text{р} t + \frac{v_\text{р} - v_0}{\beta} e^{-\beta t} + c .$$

Из начального условия t=0, S=0:

$$c = \frac{v_\text{р} - v_0}{\beta} ,$$

тогда

$$S = v_{\text{р}}t + \frac{v_{\text{р}} - v_0}{\beta}\left(1 + e^{-\beta t}\right) \tag{18}$$

Из зависимостей (17) и (18) видно, что $v = v_{\text{р}}$, если $t \to \infty$. Для определения момента времени, когда движение с хорошей степенью точности можно считать равномерным, и пути, пройденного к этому моменту, необходимо выполнить численное моделирование. При этом относительная погрешность в определении скорости должна быть того же порядка, что и остальные погрешности в определении коэффициента динамической вязкости, и сравнима с погрешностью между расчетной и экспериментально определяемой скоростью движения.

Компьютерная модель

Относительная погрешность в определении вязкости может быть рассчитана в соответствии с методикой, описанной в [2], по формуле:

$$\frac{\Delta\eta}{\eta} = \frac{\Delta g}{g} + \frac{2\Delta r}{r} + \frac{\Delta\rho_{\text{ш}}}{\rho_{\text{ш}} - \rho_{\text{ж}}} + \frac{\Delta\rho_{\text{ж}}}{\rho_{\text{ш}} - \rho_{\text{ж}}} + \frac{\Delta v}{v} \tag{19}$$

От радиуса шарика зависят 2-е и 5-е слагаемые. Δr – погрешность в измерении радиуса шарика, определяется возможностями приборов. Для микрометра, используемого в данной лабораторной работе, она составляет половину цены деления, равную 0,01 мм, следовательно, $\Delta r = 0{,}005$ мм.

Относительная погрешность в определении скорости может быть связана с тем, что, во-первых, шарик движется не в неограниченной среде, а в сосуде, ограниченном стенками, а во-вторых, с тем, что движение считается равномерным.

В соответствии с формулами (5) и (10) скорость движения шарика может быть представлена как:

$$v = v_p k_1 k_2 . \tag{20}$$

Тогда относительная погрешность, связана с предположением о движении шарика в безграничной среде, равна:

$$\sigma_v = \frac{v_p - v_0}{v_p} = 1 - k_1 k_2 \tag{21}$$

гдеv_0 – скорость равномерного движения шарика в сосуде,

$v_{\text{р}}$ – скорость равномерного движения шарика в безграничной среде.

Относительная погрешность, связанная с неравномерностью движения шарика, в соответствии формулой (16) равна.

$$\sigma_v^{/} = \frac{|\, v_p - v \,|}{v_p} = \left| 1 - \frac{v_0}{v_p} \right| e^{-\beta t} \tag{22}$$

При $t \to \infty$, $\sigma_v^{/} \to 0$. Выбирая для начала отсчета времени, положение шарика такое, что $\sigma_v^{/} >> \sigma_v$ движение с хорошей степенью точности можем считать равномерным. Выбор соответствующего момента времени может быть осуществлен по результатам расчета v и S в соответствии с формулами (16) и (18).

Расчет относительной погрешности в определении вязкости жидкости для различных радиусов шарика производится с помощью стандартного табличного процессора, например, MS Excel.

Для численного моделирования закономерностей движения шарика в вязкой среде и для расчета значений времени t и положения S, начиная с которых движение шарика будет равномерным, также используется табличный процессор (MS Excel).

Задания для моделирования

I. Определение оптимального радиуса шарика.

1 В столбец А ввести параметры эксперимента.

В ячейку **A1** ввести заголовок «ρ, кг/м^3» (плотность шарика).

В ячейку **A2** ввести значение 7800.

В ячейку **A3** ввести заголовок «$\rho_{ж}$, кг/м^3» (плотность жидкости).

В ячейку **A4** ввести значение 960.

В ячейку **A5** ввести заголовок «η, Па·с» (коэффициент вязкости).

В ячейку **A6** ввести значение1.

В ячейку **A7** ввести заголовок «*R*, м» (радиус сосуда).

В ячейку **A8** ввести значение 0,015.

В ячейку **A9** ввести заголовок «*h*, м» (высота сосуда).

В ячейку **A10** ввести значение 0,3.

В ячейку **А11** ввести заголовок «g, м/с^2», (ускорение свободного падения).

В ячейку**А12** ввести значение 9,81.

2 В столбец В, начиная с ячейки В2, ввести значения радиуса шарика r = 0,5–3,5 мм с интервалом 0,5 мм. В ячейку **В1** ввести заголовок «r, мм» (радиус сосуда).

3 В ячейку**С1** ввести заголовок «$v_р$» (скорость равномерного движения шарика).

Рассчитать скорость равномерного движения шарика в жидкости по формуле:

$$v = \frac{2}{9} r^2 g \frac{\rho_ш - \rho_ж}{\eta},$$

и отобразить в столбце С.

Для этого в ячейку **С2** ввести формулу, как следующую цепочку символов:

=2/9*$B2*$B2*$A$12*($A$2-$A$4)/ $A$6*0,000001

Скопировать формулу в ячейки С3–С8 (выделить ячейку **С2** и, придерживая нажатой клавишу Ctrl, тянуть указатель мыши вниз).

4 В столбец D ввести значения поправки, связанной с наличием стенок сосуда. В ячейку **D1** ввести заголовок «k1». В ячейку **D2** ввести формулу для расчета поправки:

$$k_1 = \frac{1}{1 + 2{,}4 \dfrac{r}{R}},$$

как цепочку символов: =1/(1+2,4*$B2/$A$8*0,001)

Скопировать формулу на ячейки **D3–D8**.

5 Рассчитать относительную погрешность, связанную с поправкой, учитывающей влияние стенок сосуда, по формуле:

$$\delta_1 = (k_1 - 1) * 100\% .$$

В ячейку **Е1** ввести заголовок «δ_1» В ячейку **Е2** ввести формулу, как цепочку символов:

=(1-D2)*100

Скопировать формулу на ячейки **Е3–Е8**.

6 Рассчитать поправку, связанную с конечной высотой сосуда, по формуле:

$$k_2 = \frac{1}{1+3,3\frac{r}{h}},$$

и ввести результаты в столбец F.

В ячейку **F1** ввести заголовок «k2».

В ячейку **F2** ввести формулу =1/(1+3,3*$B2*0,001/$A$10**)**. Скопировать формулу на ячейки **F3–F8**.

7 Рассчитать относительную погрешность, связанную с наличием поправки, учитывающей конечную высоту сосуда, по формуле

$$\delta_2 = (1-k_2)\cdot 100\%$$

В ячейку **G1** ввести заголовок «δ_2» В ячейку **G2** ввести формулу, как цепочку символов:

=(1-F2)*100

Скопировать формулу на ячейки **G3–G8**.

8 Рассчитать относительную погрешность, связанную с наличием обеих поправок по формуле:

$$\delta = (1-k_1 \cdot k_2)\cdot 100\%$$

В ячейку **H1** ввести заголовок «δ» В ячейку **H2** ввести формулу, как цепочку символов:

=(1-D2*F2)*100

Скопировать формулу на ячейки **H3–H8**.

9 Рассчитать относительную погрешность, связанную с погрешностью измерения радиуса шарика:

$$\delta_r = \frac{2\Delta r}{r},$$

где $\Delta r = 0,005$ мм – погрешность микрометра.

В ячейку **I1** ввести заголовок «δ_r» В ячейку **I2** ввести формулу, как цепочку символов:

=0,01/B2*100

Скопировать формулу на ячейки **J3–J8**.

10 Оформить и распечатать таблицу (табл. 1.11.1).

Таблица 1.11.1.

ρ, кг/м^3	***r*, мм**	v **р**	**k 1**	**δ1**	**k 2**	**δ2**	**δ**	**δ$_r$**
ρ$_ж$, кг/м^3								
η, Па·с								
***R*, м**								
***h*, м**								
g, м/с^2								

11 Сделать вывод:

Каким должен быть радиус шарика, чтобы суммарная погрешность была минимальна?

II. Моделирование движения шарика в вязкой жидкости при установлении режима равномерного движения

1 Ввести заголовки столбцов в первой строке.

В ячейку **A1** ввести $N_{шага}$ (номер шага).

В ячейку **B1**ввести *t* (текущее время).

В ячейку **C1** ввести v (скорость).

В ячейку **D1** ввести δ_v (отклонение текущего значения скорости от скорости равномерного движения).

В ячейку **E1** ввести *S* (пройденный путь).

В ячейку **F1** ввести *a* (ускорение).

2 Ввести значения параметров эксперимента в столбцы H и I, подписав каждый:

В ячейку **H2** ввести *g, м/с^2* (ускорение свободного падения).

В ячейку **I2** ввести 9,8

В ячейку **H3** ввести*r,м* (радиус шарика).

В ячейку **I3** ввести 0,001

В ячейку **H4** ввести η , Па·*с* (вязкость жидкости).

В ячейку **I4** ввести 1

В ячейку **H5** ввести $\rho_{ш}$, *кг/м³* (плотность шарика).

В ячейку **I5** ввести 7800

В ячейку **H6** ввести $\rho_{ж}$, *кг/м³* (плотность жидкости).

В ячейку **I6** ввести 960

В ячейку **H7** ввести h, *м* (расстояние, пройденное шариком в воздухе).

В ячейку **I7** ввести 0

В ячейку **H8** ввести Δt , *с* (шаг по времени).

В ячейку **I8** ввести 0,001

3 Ввести параметры движения шарика:

В ячейку **H9** ввести α (коэффициент, $\alpha = g\left(1-\frac{\rho_{ж}}{\rho_{ш}}\right)$).

В ячейку **I9** ввести формулу для расчета α, набрав цепочку символов:

=$I$2*(1-$I$6/$I$5)

В ячейку **H10** ввести β (коэффициент, $\beta = \frac{9}{2}\frac{\eta}{\rho_{ш} r^2}$).

В ячейку **I10** ввести формулу для расчета β, набрав цепочку символов:

=9/2*$I$4/($I$5*$I$3*$I$3)

В ячейку **H11** ввести v_0 (начальная скорость).

В ячейку **I11** ввести значение скорости, приобретенной шариком за время падения в воздухе, и рассчитанное по формуле $v = \sqrt{2gh}$. Для этого набрать цепочку символов:

=КОРЕНЬ(2*$I$2*$I$7)

В ячейку **H12** ввести $v_р$ (скорость установившегося равномерного движения).

В ячейку **I12** ввести формулу для расчета скорости равномерного движения

$v_{р} = \frac{2}{9} g r^2 \frac{\rho_{ш} - \rho_{ж}}{\eta}$, набрав цепочку символов:

=2/9*$I$2*$I$3*$I$3*(($I$5-$I$6)/$I$4)

4 Во вторую строку ввести начальные условия.

В ячейку **B2** ввести 0 (начальный момент времени).

В ячейку **E2** ввести 0 (начальная координата).

В ячейку **C2** ввести =$**I$11** (начальная скорость).

5 Ввести формулу $a = g\left(1 - \frac{\rho_{ж}}{\rho_{ш}}\right) - \frac{9}{2}\frac{\eta v}{\rho_{ш} r^2} = \alpha - \beta v$ для расчета ускорения в ячейку **F2**. Для этого набрать цепочку символов:

=$I$9-$I$10*C2

6 Ввести формулы для расчета времени, пройденного пути и скорости, рассчитываемых по формулам (16) и (18).

В ячейку **B3** ввести цепочку символов:

=B2+$I$8.

В ячейку **C3** ввести цепочку символов:

=C2+F2*$I$8 формула (16).

В ячейку **D3** ввести цепочку символов:

=C3-I12 разность текущего значения скорости и скорости равномерного движения

В ячейку **E3** ввести цепочку символов:

=E2+C2*$I$8 формула (18).

Скопировать формулы из ячеек **B3**, **C3**, **E3**, **F2** на соответствующие нижележащие ячейки.

7 Пронумеровать шаги расчета: в ячейку **A2** и последующие ввести значения, начиная с 0, с шагом 1. Количество шагов выбрать для начала 10. Затем увеличивать число шагов пока в столбце **D** появятся нулевые значения при решении задачи.

8 Определить для заданных параметров:

⇒ начальную скорость движения шарика;

- ⇒ скорость равномерного движения шарика;
- ⇒ характер движения до того, как оно станет равномерным; время неравномерного движения (время установления режима равномерного движения);
- ⇒ расстояние, которое проходит шарик прежде, чем его движение станет равномерным;
- ⇒ количество шагов вычисления, которые необходимо выполнить.

v_0 = ____

v_p = ____

$t_{нр}$ = ____

$S_{нр}$ = ____

Характер движения:________________________ (объяснить почему).

$N_ш$ = ____

9 Исследовать, как влияет размер шарика на параметры движения. Установить последовательно значения r = 0,0015; 0,0017; 0,002; 0,0025; 0,003; 0,0035 м. Для каждого значения r определить параметры движения так, как это делали в п. 8. Значения Δt каждый раз подбирать так, чтобы число шагов было минимальным, а результаты оставались корректными. Как изменяется с увлечением (уменьшением) радиуса скорость установившегося равномерного движения, время и расстояние, пройденные до этого, характер движения.

10 Исследовать, как изменяется параметры движения шарика в зависимости от начальной скорости шарика. Для этого изменяем значение h – высоты, с которой шарик падает в жидкость. Задавая значения h = 0,05 - 0,2 (м) с интервалом 0,05; определить характеристики движения, приведенные в п. 8. Как изменяется с увеличением расстояния, а значит и начальной скорости, характер движения, скорость равномерного движения, время и путь при неравномерном движении? При необходимости изменить значение Δt .

11 Оформить результаты в виде таблицы (таблиц) и сделать вывод.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте закон Ньютона для течения вязкой жидкости.
2. Что называется коэффициентом динамической вязкости?
3. В каких единицах измеряется вязкость?
4. Чему равна сила Стокса? Какова физическая природа этой силы?
5. Выведите формулу для скорости равномерного движения шарика в вязкой жидкости.

Литература

1. Методические указания к лабораторным работам по разделу “Статистическая физика и термодинамика” курса физики/ Под ред. В.А. Базакуца–Харьков, ХПИ, 1989. – с. 49-58.
2. Методические указания к лабораторным работам по разделу “Механика” курса физики/ Под ред. В.А. Базакуца–Харьков, ХПИ, 1989. – 198 с.
3. Савельев И.В. Курс общей физики. – М.: Наука, 1989. – Т.1. 352с.
4. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. – М.: Высш. шк., 1989. – 608 с.