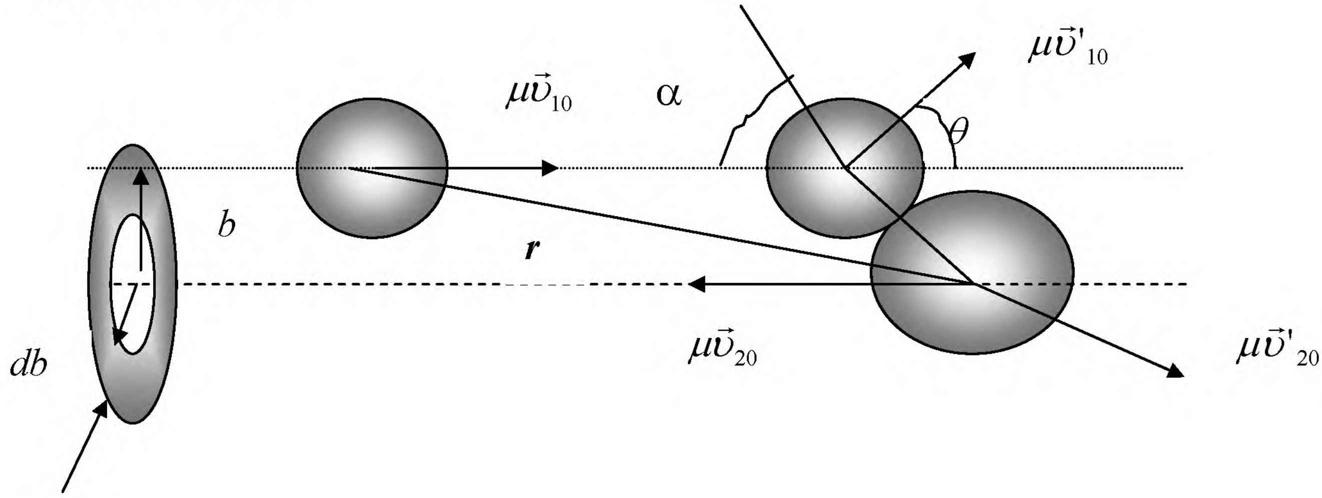
Упругое столкновение шаров

1. Постановка задачи. Рассмотрим две частицы с массами m_1 и m_2, расположенные на расстояниях $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ от начала лабораторной системы отсчета. Величины $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ есть скорости движения этих частиц, в той же системе отсчета.



Задача состоит в рассмотрении упругих столкновений этих шаров

Здесь приведенная масса равна $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

Определение направления движения после упругого взаимодействия.

Пусть $\vec{R}$ радиус вектор центра масс в лабораторной системе отсчета

$(m_1 + m_2)\vec{R} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2$.

Тогда скорость центра масс определится как

$\vec{V}_c = \dfrac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}$.

В момент столкновения шаров в системе центра масс скорость будет равна

$\vec{\upsilon}_{10} = \vec{\upsilon}_1 - \vec{V}_c$,

$\vec{\upsilon}_{20} = \vec{\upsilon}_2 - \vec{V}_c$.

Изменение скорости после столкновения

$\vec{\upsilon}'_{10} = \vec{\upsilon}_{10} - 2\vec{\upsilon}_{\vec{r}\,//}$,

$\vec{\upsilon}'_{20} = \vec{\upsilon}_{20} + 2\vec{\upsilon}_{\vec{r}\,//}$,

где $\vec{V}_{//} = \dfrac{(\vec{V}_c\vec{l})}{|l|}\vec{r}$.

Направление скоростей после столкновения в лабораторной системе координат

$$\vec{\upsilon}'_1 = \vec{\upsilon}'_{10} + \vec{V}_c \ ,$$

$$\vec{\upsilon}'_2 = \vec{\upsilon}'_{20} + \vec{V}_c \ .$$

Эти уравнения составляют основу определения направления движения шаров после упругого столкновения.

3. Уравнение движения в лабораторной системе координат. Траекторию движения упругого шара можно получить из законов сохранения импульса, энергии и момента импульса. В сферической системе координат они имеют вид

$$m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2 = (m_1 + m_2)\vec{\upsilon} = m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{\upsilon}_1' + m_2\vec{\upsilon}_2',$$

$$\frac{1}{2}\mu\upsilon^2 = \frac{1}{2}\mu((\frac{dr}{dt})^2 + r^2\alpha^2) + U(r),$$

$$L = \mu \ r^2 \frac{d\alpha}{dt},$$

где μ - приведенная масса. Эти уравнения описывают рассеяние частицы, относительной скоростью υ и моментом импульса L. Поскольку орбитальный момент импульса является постоянным, величину $\frac{d\alpha}{dt}$ можно исключить и представить в виде

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\upsilon \cdot b}{r^2}\frac{dr}{d\alpha},$$

подставляя, получаем уравнение траектории

$$\frac{dr}{d\alpha} = \pm\frac{r^2}{b}\left[1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{\mu\upsilon^2}\right]^{1/2}.$$