

Физический маятник

1. Постановка физической задачи. Рассмотрим колебания физического маятника. Пусть на неподвижном шарнире подвешен маятник – груз массы m , находящийся на конце стержня длины l (рис.4.30).

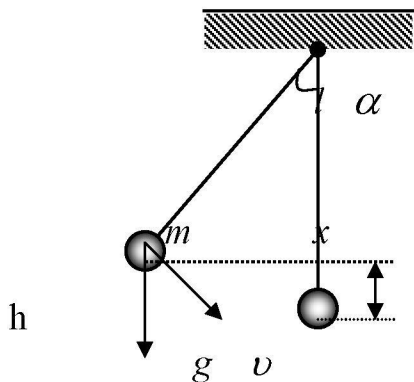


Рис. 4.30

Рассмотрим следующие допущения: груз имеет небольшие размеры по сравнению с длиной стержня (материальная точка); ускорение свободного

Шарнир считается идеально гладким в том смысле, что в нем не происходят потери энергии на трение. Неподвижность шарнира означает, что от него энергия в систему “стержень-груз” не поступает, такой шарнир не способен совершить над ней какую-либо работу. Стержень считается невесомым и абсолютно жестким, т. е. его кинетическая и потенциальная энергии равны нулю, а груз не может совершать движений вдоль оси стержня.

падения g постоянно; сопротивлением воздуха пренебрегаем; колебания происходят в фиксированной вертикальной плоскости (для чего, очевидно, вектор начальной скорости груза должен лежать в этой плоскости). После всех этих упрощающих предположений ясно, что положение маятника определяется лишь одной обобщенной координатой, в качестве которой выберем угол $\alpha(t)$ отклонения стержня от вертикали.

2. Математическую модель колебания маятника под действием сил тяжести можно получить на основе применения принципа Гамильтона [11]. Она имеет вид:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \alpha. \quad (4.51)$$

Введем понятие частоты собственных колебаний, вводя обозначение

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}.$$

Заметим, что уравнение колебаний маятника (4.51) нелинейное. Это обстоятельство связано с более сложной геометрией системы “стержень – груз”, а именно: ускорение, испытываемое грузом, не пропорционально координате, как в случае закона Гука, а является более сложной функцией отклонения от положения равновесия (угла α). Если же эти отклонения малы, то $\sin \alpha \approx \alpha$, и модель малых колебаний линейна:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -\omega_0^2 \alpha, \quad (4.52)$$

т.е. мы получили модель, описывающую колебания математического маятника. Если учесть трение на шарнирах, то имеем следующее уравнение

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -\omega_0^2 \sin \alpha - \gamma \frac{d\alpha}{dt}, \quad (4.53)$$

где коэффициент затухания γ представляет меру тормозящей силы.

3. Задания на моделирование

1. Провести масштабирование переменных и привести дифференциальные уравнения к безразмерному виду.
2. Написать алгоритм решения дифференциальных уравнений (4.53). Построить разностную схему и разностные уравнения.
3. Составить программу согласно алгоритму. Выходные данные представить в графической форме.
4. Задача вычислительного эксперимента состоит в моделировании колебаний физического маятника с учетом трения. Рассмотрите колебания физического маятника с учетом вынуждающей силы, которая учитывается как слагаемое в правой части уравнения (4.53):

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\omega_0^2 \sin \alpha - \gamma \frac{d\alpha}{dt} + \frac{F(t)}{m}. \quad (4.54)$$

Понижая порядок уравнений, получим систему уравнений, которую будем решать численным методом

$$\frac{d\omega}{dt} = -\omega_0^2 \sin \alpha - \gamma\omega + \frac{F(t)}{m},$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega$$

Внешнюю силу можно рассмотреть как гармоническую в виде

$$\frac{F(t)}{m} = A_0 \cos(\omega_1 t),$$

где ω_1 - угловая частота вынуждающей силы.

4. Постройте график зависимости $x(t) = l \sin(\alpha(t))$ от времени.

6. Вычислите периоды колебаний по уравнениям (4.51) и (4.52), сравните их и сделайте выводы.

4. Результаты моделирования. На рис.4.31 приведен пример решения уравнения (4.54) с учетом трения.

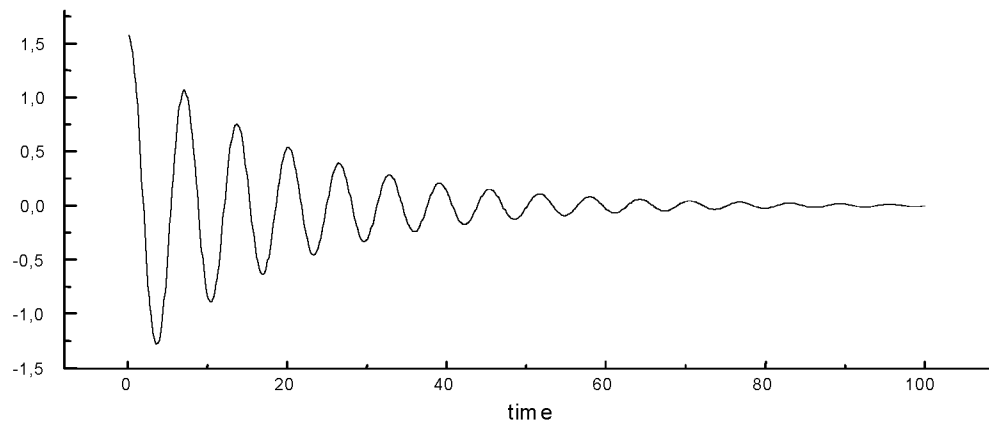


Рис.4.31